Jean Sousselier 30/08/2024

Conjecture de Syracuse : bribes et carrefours.

1. Enoncé de la conjecture (Wikipedia)

En mathématiques, on appelle **suite de Syracuse** une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14.

Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2…) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

La **conjecture de Syracuse**, encore appelée **conjecture de Collatz**, **conjecture d'Ulam**, **conjecture tchèque** ou **problème 3*x* + 1**, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes[1].

2. Bribes et carrefours.

Soit un nombre x . Dans toute suite de Syracuse où il apparait, il n'a par définition qu'un seul successeur : x/2 si x est pair, (3 x +1) si x est impair.

Combien peut-il avoir de prédécesseurs ?

- Un seul s'il est impair, à savoir 2x
- Un ou deux s'il est pair, à savoir d'une part 2x, d'autre part éventuellement un nombre y tel que x = 3y + 1 . Mais pour cela il faut que y soit impair, soit 2n + 1, et donc x = 3(2n+1) + 1, soit x= 6n + 4

En conclusion seuls les nombres de la forme 6n + 4 peuvent avoir 2 prédécesseurs, appelons les « **carrefours** ». Ils forment une **congruence** : tous les carrefours sont congrus à 4 modulo 6.

Appelons « **bribe** » une séquence de nombres d'une suite de Syracuse compris entre un carrefour (inclus dans la bribe) et le carrefour suivant.

Une bribe est donc définie par un nombre (6n+4) et tous ses successeurs, jusqu'à ce qu'on tombe sur un autre carrefour.

Chaque nombre autre que (6n+4) n'appartient qu'à une seule bribe (sauf les cas des multiples de 6, voir plus loin « pseudo-bribes »).

Tout nombre impair a pour successeur un carrefour, et pour prédécesseur un nombre pair.

Toute suite de Syracuse est une succession de bribes (ou pseudo-bribes) .

Chaque bribe (sauf terminale) est suivie d'une autre bribe.

Exemples de suites de Syracuse avec mise en évidence des bribes (les carrefours sont en jaune) :

3	10	5	16	8	4	2	1												
4	2	1																	
5	16	8	4	2	1														
6	3	10	5	16	8	4	2	1											
7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1			
8	4	2	1																
9	28	14	7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1
10	5	16	8	4	2	1													
11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1					

Le nombre 26 par exemple, ne peut jamais apparaître que dans la bribe (52, 26, 13)

La première question à se poser est celle-ci : étant donné un nombre x, peut-on affirmer que dans la suite de Syracuse partant de ce nombre, on tombe forcément sur un carrefour ? Si ce n'était pas le cas, alors la conjecture de Syracuse serait fausse (on ne peut arriver à la valeur 1 qu'en passant par le carrefour 4).

Or cela est évident ; il suffit de tomber sur un nombre impair (puisque tout nombre impair a pour successeur un carrefour). Si on a une suite de nombre pairs, on tombe forcément sur un nombre impair dans la suite de Syracuse avec la division par 2 (ou la valeur 1).

3. Composition des bribes.

Une bribe est définie par un carrefour A, suivi d'un ou plusieurs nombres jusqu'au carrefour suivant B : A x y … B

Démontrons qu'on ne peut avoir en fait que les configurations suivantes (en désignant par P un nombre pair et par I un nombre impair) :

1. A P B
2. A I B
3. A P I B

En effet, si le nombre précédant B est pair : B = 4 + 6n → P = 8 + 12n → ce nombre n'est pas un carrefour → le nombre précédant P est 16 +24n = 4 + 6x , c'est un carrefour, cas 1.

Si le nombre précédent B est impair le double de I =1+2n peut être :

2+4n = 6x, ou 6x + 2, ou 6x + 4

- 6x + 4 : c'est un carrefour, on est donc dans le cas 2. A I B
- 6x + 2 : le nombre précédent est 12x +4 qui est un carrefour, on est donc dans le cas 3. A P I B
- 6x : dont le nombre précédent est 12x, dont le nombre précédent est 24x et ainsi de suite : dans ce cas on n'atteint jamais un carrefour, on peut prolonger cette suite à l'infini.
  Ce cas se produit avec tous les multiples de 6.

Si on considère la suite (12 - 6 - 3 - 10), on ne peut trouver la bribe (A …. 12 – 6 – 3), puisque le carrefour A n'existe pas, on n'obtient qu'une suite infinie de multiples de 6.

En conclusion, les bribes n'appartiennent qu'aux cas 1 à 3 :

1)	**A P B**	B = A/4	B < A	A = 4 B
2)	**A I B**	B = 3 A/2 + 1	B > A	A = 2 / 3 (B – 1)
3)	**A P I B**	B = 3 A/4 + 1	B < A	A = 4 / 3 (B – 1)

Remarque 1 :

Il y a une bribe particulière : celle ayant pour origine le carrefour 4 . C'est la bribe 4 – 2 – 1 – 4 . Nous l'appellerons bribe terminale. On constate aisément que c'est la seule pour laquelle on a A = B

Remarque 2 :

Tout nombre autre que (6n+4) appartient à une bribe et une seule, avec le cas particulier des **multiples de 6, qui appartiennent à une pseudo-bribe infinie** comme par exemple (…… 72 – 36 – 18 – 9 – 28) : les multiples de 6 ne sont pas des carrefours, et on ne trouve pas de carrefours dans leurs ascendants.

Une telle bribe infinie se termine forcément par un impair multiple de 3, et inversement tout multiple de 3 a pour ascendant un multiple de 6 et donc appartient à une bribe infinie. Donc les vraies bribes, partant d'un carrefour A et aboutissant à un carrefour B **ne contiennent aucun multiple de 3.**

Donc, les nombres constituant une bribe (hors les extrémités) sont de la forme

6n + 1, ou **6n + 2**, ou **6n + 5.**

Remarque 3 :

La liste des bribes définit également **l'ensemble des suites de Syracuse** : étant donné un nombre n quelconque, il suffit de trouver le carrefour C1 qui suit n (c'est 3n+1 si n est impair, si n est pair il suffit de le diviser C par 2 jusqu'à ce qu'on trouve un impair). Le carrefour C2 est le suivant de C1 dans cette liste, le carrefour C3 est le suivant de C2 et ainsi de suite.

Conformément à ce qui précède, **une suite de Syracuse ne contient aucun multiple de 3**, sauf le cas échéant sa valeur initiale, et ses successeurs immédiats (36 - 18 – 9 – 28).

Les possibilités d'une suite de Syracuse sont les suivantes :

- Convergence vers 1
- Boucles, ou cycles (on retombe sur un carrefour Cx qu'on a déjà rencontré)
- Divergence : la valeur de Cx tend vers l'infini. :

Résumé :

Pour une bribe A-B, avec $A = 6n_A + 4$ et $B = 6n_B + 4$, on a les 3 cas suivants

n_A	Bribe	B	n_B
4p	**A P I B**	3 A/4 + 1	$3\ n_A/4 = 3p$
2(2p+1)	**A P B**	A/4	$(n_A - 2)/4 = p$
2p+1	**A I B**	3 A/2 + 1	$(3n_A + 1)/2 = 3p+2$

5. Notion « d'ordre de parité ou d'imparité »

Définissons la parité d'ordre n des nombres pairs ainsi :

x est pair d'ordre n si $x=\mathbf{2^n(2p-1)}$

Tout nombre pair s'écrit donc : $\mathbf{P(n,p) = 2^n(2p-1)}$ avec n et p entiers >0

Définissons de même l'imparité d'ordre n des nombres impairs.

Tout nombre impair s'écrit y = x-1, x étant un nombre pair, donc

$\mathbf{I(n,p) = 2^n(2p-1) \ -1}$ avec n et p entiers >0

Remarques :

si y est impair d'ordre n, **2y+1** est impair d'ordre (n+1)

En effet, $2y+1 = 2^{n+1}(2p-1) -2 +1 = 2^{n+1}(2p-1) -1$

On définit ainsi une suite croissante infinie de nombres d'ordre d'imparité augmenté de 1 à chaque pas.

Si x est pair d'ordre n, $\mathbf{2x = 2^{n+1}(2p-1)}$ est pair d'ordre (n+1)

On définit ainsi une suite croissante infinie de nombres d'ordre de parité augmenté de 1 à chaque pas.

---

6. Application aux carrefours.

6.1 Suite croissante de carrefours.

Reprenons le tableau des différentes bribes AB avec $A = 6x_A +4$ et $B = 6x_B +4$
Appelons « modules » les nombres x_A et x_B

x_A	Bribe	B	x_B
4p	**A P I B**	3 A/4 + 1	$3\ x_A /4 = 3p$
2(2p+1)	**A P B**	A/4	$(x_A -2)/4 = p$
2p+1	**A I B**	3 A/2 + 1	$(3x_A +1)/2 = 3p+2$

Les bribes des lignes 2 et 3 de ce tableau ont un carrefour origine avec un module pair (ordre d'imparité α =0) et ont un carrefour successeur plus petit.
La bribe de la ligne 4 a un carrefour origine avec un module impair d'ordre α_n avec n >0, et a un successeur plus grand.
L'idée est de rechercher dans quelles conditions cette croissance pourrait se prolonger. Pour cela, soit n l'ordre d'imparité de $x_A = 2p+1$:

$x_A = 2^{n+1}q - 2^n - 1$
$x_A = 2^{n+1}q - 2^n -2 + 1$
soit $x_A = 2 (2^n q - 2^{n-1} -1) + 1$
donc $p = 2^n q - 2^{n-1} -1$
$x_B = 3p+2$
$x_B = 3 (2^n q - 2^{n-1} -1) + 2$
$x_B = 3. 2^n q - 3. 2^{n-1} -1$
$x_B = 2^n 3q - 2. 2^{n-1} - 2^{n-1} -1$
$x_B = 2^n (3q - 1) - 2^{n-1} -1$

On voit donc que le module du successeur B de A =6(2p+1)+4 est impair d'ordre n-1.

Conclusion : Tout carrefour avec un module impair d'ordre n a comme descendants successifs une suite croissante de carrefours avec des modules impairs d'ordre n-1, n-2, n-3,…. , croissance qui ne prendra fin que lorsqu'on atteindra un nombre d'ordre d'imparité 0, c'est-à-dire un nombre pair.
Ou encore : toute suite de carrefours continument croissante a pour origine un nombre avec un module impair d'ordre n, et comprend (n+1) nombres.

On peut vérifier en prenant comme module origine le nombre (2^n -1), en prenant n =7, on a la suite de modules : 127, 191 , 287 , 431 , 647 , 971 , 1457 , 2186

Ainsi, en partant d'un carrefour avec un module impair d'ordre n, on obtient une suite croissante de (n+1) carrefours, puis une décroissance (n étant aussi grand que l'on veut). Cela n'infirme pas la conjecture de Syracuse, sauf à l'infini (si on admet l'existence de l'infini actuel…).

Remarque 1:

On peut arriver au même résultat plus simplement en considérant la suite de Syracuse partant d'un nombre impair d'ordre n :

A1 = $\mathbf{I(n,p) = 2^n(2p-1) -1}$

Le nombre suivant A2 = (3A1 + 1)/2 est : $[3 (2^n(2p-1) -1) +1] /2$

A2 $=[3 .2^n(2p-1) -2] /2$

A2 $= 3 .2^{n-1}(2p-1) - 1$

A2 $= 2^{n-1}(6p-3) - 1 = I(n-1, 3p-1)$ qui est un nombre impair d'ordre n-1

Donc la suite de Syracuse partant de **I(n,p)** comprend n nombres strictement croissants A1, A2, … An

Remarque 2 :

Soit A_1 un carrefour avec un module impair d'ordre n, et ses successeurs A_1 - A_2 – A_3 - ……………A_{n+1}

$A_2 = 3\,A_1/2 + 1$

$A_3 = 3/2(3\,A_1/2 + 1) + 1 = (3/2)^2 A_1 + 3/2 + 1$

$A_4 = 3/2((3/2)^2 A_1 + 3/2 + 1) + 1 = (3/2)^3 A_1 + (3/2)^2 + 3/2 + 1$

$A_{n+1} = (3/2)^n A_1 + (3/2)^{n-1} + \dots\dots + 3/2 + 1$

6.2 Suite décroissante de nombres.

Considérons un nombre pair d'ordre n (qui n'est pas forcément un carrefour) : $\mathbf{A_1=2^n(2p+1)}$

Il est clair qu'il y a une suite de Syracuse décroissante de n si n nombres pairs, chacun étant la moitié du précédent A_1 - A_2 – ……………A_n et telle que $A_{n+1} = 2p+1$

6.3 Loi finale.

Tout carrefour ayant un module d'ordre impair d'ordre n est suivi de n (et seulement n) carrefours croissants.

Tout nombre pair d'ordre n est suivi de n (et seulement n) nombres décroissants.

6.4 Application : cheminement rapide dans les suites de Syracuse.

Au lieu de progresser pas à pas, de nombre en nombre, dans une suite de Syracuse, on peut sauter plusieurs carrefours à chaque étape : en partant d'un carrefour A=6x+4 , on saute à un carrefour B avec les règles suivantes :

(a) Si le module x de A est impair d'ordre d'imparité n, on peut sauter jusqu'au carrefour B (de module pair) :

$$B = (3/2)^n A + (3/2)^{n-1} + \dots\dots + 3/2 + 1$$

(b) Si le module x de A est pair, soit n l'ordre de parité de A : $A = 2^n(2q+1)$;

- on peut d'abord sauter jusqu'au nombre impair y=2q+1

- puis on remonte jusqu'au carrefour précédent, à savoir 2y (si c'est un carrefour) à défaut 4y (il se peut qu'on retombe sur A !).

6.5 Chaînes de carrefours.

6.5.1 Chaînes croissantes.

Considérons une suite croissante de carrefours A_1 - A_2 - ……………A_{n+1} , (A_{n+1} étant le premier carrefour de module pair). Comment peut-on la prolonger en amont, au-delà de A_1 ? A_1 a deux prédécesseurs, dont l'un vaut $4A_1$ et donc ne fait pas partie de la chaîne étudiée. L'autre prédécesseur, pour faire partie de cette chaîne, doit être plus petit que A_1, et avoir un module impair d'ordre plus grand que celui de A_1.

Module de A_1 : $2^n(2q+ 1) -1$

Module du groupe précédent : $2^m(2r+ 1) -1 < 2^n(2q+ 1) -1$

Donc $2^m(2r+ 1) < 2^n(2q+ 1)$ avec $m > n$

Et forcément $2^{m-n} < 2q+ 1$

Mais cela est vrai pour tous les précédents hypothétiques avec un module impair, qui diminuent au fur et à mesure mais avec un ordre d'imparité croissant. On atteint donc une limite pour m donnée par la condition $2^{m-n} < 2q+ 1$, ce qui donne la limite pour le nombre (m-n) de groupes précédant A_1 dans la chaîne étudiée.

Donc une chaîne croissante est formée par une suite croissante, bornée aux deux bouts, de carrefours de modules impairs (sauf le dernier) A_1 - A_2 - ……………A_{n+1} , le groupe initial A_1 ayant ses 2 ascendants de module pair.

6.5.2 Chaînes décroissantes.

En partant d'un carrefour A_1 avec un module pair, en écrivant A_1 sous la forme $A_1=2^n(2p+1)$, on a une suite de Syracuse décroissante jusqu'à y=(2p+1).

Cherchons le dernier carrefour rencontré dans cette suite. On sait que A_1 étant un carrefour ne peut être multiple de 6, donc (2p+1) ne peut pas être multiple de 3, donc (2p+1) = (3q+1) ou (3q+2).

Dans le cas (3q+1), le nombre précédent dans la suite étudiée est 2(3q+1), qui n'est pas un carrefour, el l'avant-dernier est le carrefour 4(3q+1) soit 12q+4. On remarque que dans ce cas q est pair, donc le nombre successeur de (3q+1) est le carrefour (9q+4)< 12q+4, ce qui prolonge la décroissance de la suite d'au moins 2 carrefours :

$A_1=2^n(3q+1)$,…., $A_n=12q+4$, $A_{n+1} = 9q+4$, A_{n+2}

Dans le cas (3q+2), le nombre précédent dans la suite étudiée est 2(3q+2), qui est le carrefour $A_n = 6q+4$. On remarque que dans ce cas q est impair, donc A_n est le terminal de la décroissance.

$A_1=2^n(3q+2)$,…., $A_n=6q+4$

Ces chaînes décroissantes se prolongent indéfiniment en amont : $4A_1$, $8A_1$, …

6.5.3 Résumé.
Dans ce qui suit, X représente un carrefour de module impair, Y représente un carrefour de module pair. Les carrefours constituant les chaînes sont en rouge.

Chaînes croissantes (segments de droites) :

(Y) ; $\mathbf{X_1}=6(2^n(2q+1)-1)+4$ **;** $\mathbf{X_2}$ **; ………… ;**$\mathbf{X_n}$ **;**$\mathbf{Y_{n+1}}$ **=** $(3/2)^n X_1 + (3/2)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + 3/2 + 1$

Chaînes décroissantes (demi-droites ou droites) :

…… ; $\mathbf{Y_1}=2^n(3q+1)$ **;** $\mathbf{Y_2}$ **; …………………… ;**$\mathbf{Y_s}=9q+4$;$\mathbf{Y_{s+1}}$ **=**…. ?

Chaînes décroissantes (demi-droites) :

…… ; $\mathbf{Y_1}=2^n(3q+2)$; $\mathbf{Y_2}$ **;** …………………… ; $\mathbf{X_s}=6q+4$

Dans les 3 cas, on dispose d'une formule permettant de calculer directement le dernier carrefour de la chaîne commençant en X_1 ou Y_1.